

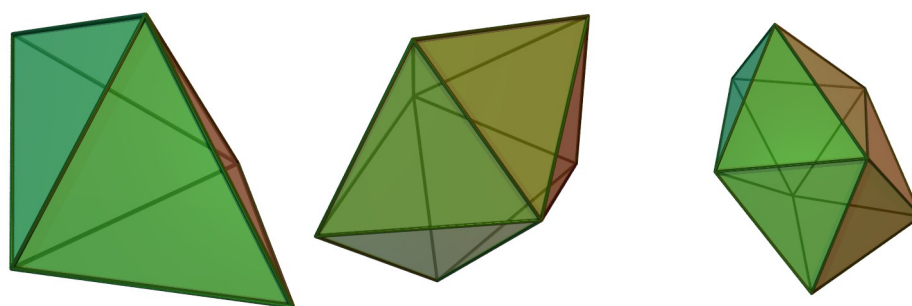
Die acht streng konvexen Deltaeder

Die Bezeichnung **Deltaeder** rührt daher, dass alle Mitglieder dieser Körperfamilie *streng konvexer* Polyeder (Vielflächner) nur aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaut sind. **Drei** der bekanntesten Repräsentanten gehören auch zu den **regulären Körpern**, namentlich das reguläre **Tetraeder**, das reguläre **Oktaeder** und das reguläre **Ikosaeder**, bestehend aus **vier**, **acht** und **zwanzig Dreiecken**.

Ein reguläres und *streng konvexes* Polyeder, das auch als **platonischer Körper** bezeichnet wird, erfüllt genau **drei** Kriterien der Regelmäßigkeit:

1. Alle **Eckpunkte** sind global uniform. Das bedeutet, man kann den Körper immer so verdrehen, dass ein beliebiger **Eckpunkt** auf einen anderen zu liegen kommt, ohne dass eine Drehung erkennbar wäre.
2. Alle geraden **Kantenlinien** sind gleich lang.
3. Alle ebenen **Wandflächen** sind deckungsgleiche **Vielecke**.

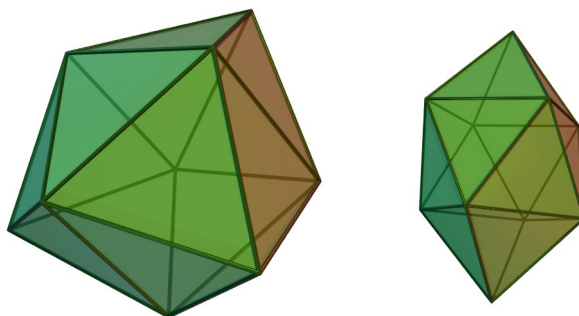
Die **fünf** anderen **Deltaeder** sind so genannte **Johnson-Körper**, benannt nach dem amerikanischen Mathematiker **Norman Johnson** (*1930), der 1966 eine entsprechende Liste mit **92** teilweise regulären **Körpern** veröffentlichte, die alle *streng konvex* sind, bei denen alle **Kantenlinien** gleich lang sind und alle **Wandflächen** aus regelmäßigen **Vielecken** bestehen. Genau **fünf** Mitglieder dieser Körperfamilie besitzen nur gleichseitige **Dreiecke** als **Wände**. Sie erfüllen damit das zweite und das dritte Kriterium der Regularität.



Trigonhexaeder J_{12} , Trigondekaeder J_{13} und Trigondodekaeder J_{84}

Die **Johnson-Körper J_{12} und J_{13}** und das reguläre **Oktaeder** sind Mitglieder des Körperklassensystems der **Doppelpyramiden** (Bipyramiden). Diese Objekte bezeichnet man deshalb auch als **Dreiecksbipyramide (J_{12})** und **Fünfecksbipyramide (J_{13})**. Im Rahmen der Betrachtung als *streng konvexe Deltaeder* erscheint allerdings eine Benennung als **Trigonhexaeder** bzw. **Trigondekaeder** entsprechend der Anzahl an **Dreiecksflächen** günstiger.

Das Objekt oben rechts, ein so genanntes [Trigondodekaeder](#), entspricht dem Johnson-Körper J_{84} .



Trigontetradekaeder J_{51} und Trigonhexadekaeder J_{17}

Eine Darstellung der beiden Johnson-Körper J_{51} und J_{17} zeigt die obige Abbildung. Diese räumlichen Formen werden ihrem Aufbau entsprechend auch als **dreifach erweitertes Dreiecksprisma** und als **verdreht verlängerte Quadratbipyramide** bezeichnet. J_{51} besteht im Kern aus einem gleichseitigen **Dreiecksprisma** auf das **drei** gleichseitig quadratische **Pyramiden** (J_1) angebaut sind, und J_{17} besteht im Kern aus einem gleichseitigen **Vierecksantiprisma** auf das **zwei** gleichseitig quadratische **Pyramiden** (J_1) aufgesetzt sind.

Ein augenscheinlich auffälliges Merkmal dieser Formfamilie aus **acht** Körpern ist die gerade Anzahl an **Dreiecksflächen**, beginnend bei **vier** in aufsteigender Reihenfolge und endend bei **zwanzig**, mit **achtzehn** als einziger Ausnahme. Der Gedanke, dass es sich hier um Mitglieder eines **nicht** endlichen Klassensystems, wie etwa bei den gleichseitigen **Prismen** oder **Antiprismen**, handelt, erscheint durchaus nahe liegend. Und in der Tat lässt sich ein solches System im Rahmen der berühmten Polyederformel von [Leonhard Euler](#) (1707 - 1783) finden. Der fundamentale Zusammenhang zwischen **Ecken**, **Kanten** und **Flächen** wird in dieser Formel für konvexe Polyeder zum Ausdruck gebracht:

$$2 = \mathbf{E} - \mathbf{K} + \mathbf{F} = (\mathbf{n}+2) - 3\mathbf{n} + 2\mathbf{n}; \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

Für Belegungen von $\mathbf{n} \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ in diesem System ergeben sich die Beziehungen zwischen **Ecken**, **Kanten** und **Flächen** für alle **acht streng konvexen Deltaeder**. Außerdem existiert ein *plankonvexes* **Trigonoktodekaeder** für $\mathbf{n} = 9$.

Abschließend stellen wir fest:

Es gibt genau **zehn streng konvexe Polyeder**, die von gleichseitig gleichwinkligen und deckungsgleichen Vielecken begrenzt werden. **Fünf** davon sind **platonische Körper** (regulär), und die anderen **fünf** sind **Deltaeder** (teilweise regulär).