Vom Punkt zum Tetraeder

Eine Reise durch das Universum der Formen mit einer einfachen Formel aus 11 Zeichen in 11 Schritten

Der Aufbau einer **Dreieckspyramide** oder eines ***Vierflaches***, wie man das **Tetraeder** auch bezeichnet, beginnend bei einem **Punkt**, wäre an und für sich noch nichts Neuartiges. Allerdings die Tatsache, dass dabei jeder Zwischenschritt mit einer einzigen Gleichung formuliert werden kann, erscheint doch erstaunlich.

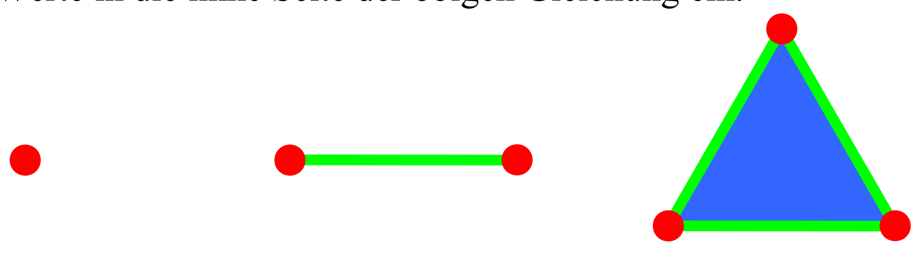
Geschichtlich betrachtet geht es um eine folgerichtige Weiterentwicklung des einfachen Ansatzes von **Leonhard Euler** (1707 - 1783), einer der genialsten Mathematiker aller Zeiten. Mit der von ihm 1758 veröffentlichten Formel

Ecken – Kanten + Flächen = **2**

findet er bereits **drei** von **fünf** grundlegenden **Elementen**, die einen ganzen Kosmos (Ordnung) von Formen im dreidimensionalen Raum beschreiben. Seine Gleichung legt ein System von räumlichen Körpern fest, die ausschließlich aus **Eckpunkten**, **geraden Kantenlinien** und **ebenen Vielecken** aufgebaut sind. Da die Anzahl der beteiligten **Flächen** variieren kann, spricht man auch von Vielflachen (Polyedern). Die eingangs erwähnte **Dreieckspyramide** mit **vier Eckpunkten**, **sechs Kantenlinien** und **vier Dreiecksflächen** ist der <u>einfachste</u> Körper dieser Art, obwohl er bereits aus **14** Formelementen besteht.

Der Forschungsansatz führt uns nun zu der Frage, ob es denn auch eine Formel gäbe, die den systematischen Aufbau dieses Körpers aus seinen elementaren Bestandteilen beschreibt.

Betrachten wir zunächst jedes dieser **drei** Formelemente in seiner einfachsten Ausführung, nämlich **einen Punkt**, **eine Strecke** und **eine Dreiecksfläche**, und setzen deren Werte in die linke Seite der obigen Gleichung ein.



1 – 0 + 0 = 1 **2 – 1 + 0 = 1** **3 – 3 + 1 = 1**

Wir stellen fest, das Ergebnis auf der rechten Seite beträgt nunmehr nur noch **Eins**. Das führt uns zu einer *vereinfachten* Form der *Euler-Gleichung*, die zwar nur für **einen Punkt** gilt, aber darüber hinaus auch schon für sehr viele **eindimensionale** und **zweidimensionale** Strukturen:

$$\mathbf{1 = p - l + w; \quad \forall\, p, l, w \in \mathbb{N}_0}$$

Dabei steht **p** für eine abzählbare Menge von **Punkten**, **l** für eine abzählbare Menge von **Linien**, die nicht zwingend gerade sein müssen, und **w** für eine abzählbare Menge von **Wänden**, die auch nicht unbedingt eben sein müssen.

Interessant erscheint hier die Tatsache, dass diese **drei** Grundelemente einer *geometrischen* Form einer einfachen Logik folgen, die wir uns im weiteren Verlauf zu Nutze machen können, um diese Art der *Euler-Gleichung* sinnvoll zu erweitern.

Bereits der berühmte griechische Mathematiker **Euklid von Alexandria** (3. Jh. v. Chr.) definiert in seinem epochalen Werk „***Die Elemente***" einen **Punkt** als ein geometrisches Objekt **ohne** jedwede räumliche Ausdehnung, also **ohne** Länge, Breite und Höhe. Eine **Linie** wäre demnach eine Form mit **einer** Länge, aber **ohne** Breite und Höhe, während eine **Wand** zwar **eine** Länge und Breite hat, aber **keine** Dicke (Höhe).

Der **Punkt** wäre also das Formelement der Dimension **Null**, während **Linien** und **Wände** **eindimensionale** bzw. **zweidimensionale** Elemente darstellen.

Folgt man dieser einfachen *Formlogik*, erscheint es durchaus sinnvoll ein endliches dreidimensionales **Raumelement r** zur Formbeschreibung einzuführen, um die Liste dieser Formelemente zu vervollständigen. Das führt uns dann zu einer Erweiterung der *vereinfachten Euler-Gleichung* in folgender Gestalt:

$$\mathbf{1 = p - l + w - r; \quad \forall\, p, l, w, r \in \mathbb{N}_0}$$

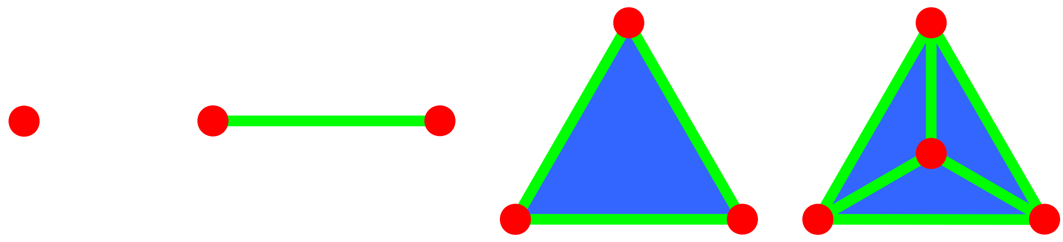
Der Sinn und Zweck dieser Gleichung offenbart sich zunächst anschaulich dadurch, dass die oben erwähnte **Dreieckspyramide** (Tetraeder) ebenfalls durch diese Formel beschrieben werden kann, was ganz leicht zu überprüfen ist:

$$\mathbf{1 = 4 - 6 + 4 - 1}$$

Dieses neue **Raumelement** kann prinzipiell in zwei Ausprägungen vorkommen, als leeres **Hohlraumelement** oder als gleichmäßig gefülltes **Vollraumelement**. Die einfachsten Beispiele hierzu wären eine **Hohlkugel** und eine **Vollkugel**.

Mit dieser einfachen Formel aus neun Zeichen können jetzt nicht nur der Anfang und das Ende unserer kurzen Reise durch das Formenuniversum beschrieben werden, sondern auch noch zwei wichtige Zwischenstationen.

Punkt	**Strecke**	**Dreieck**	**Tetraeder**



0-Simplex	**1-Simplex**	**2-Simplex**	**3-Simplex**

Punkt, **Strecke**, **Dreieck** und **Tetraeder** stellen in einem elementargeometrischen System bestehend aus **Punkten**, geraden **Linien** und ebenen **Wänden** die jeweils einfachste Grundform (Simplex) mit einer endlichen Ausdehnung dar.

Grundform	Punkte	Linien	Wände	Räume	Summe
Punkt:	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
Strecke:	**2**	**1**	**0**	**0**	**3**
Dreieck:	**3**	**3**	**1**	**0**	**7**
Tetraeder:	**4**	**6**	**4**	**1**	**15**

Die **Simplex-Formel 1 = p – l + w – r** beschreibt das geometrische Modell dieser Simplizes in den Raum-Dimensionen **Null** bis **Drei** mit einer einfachen Gleichung. Gleichzeitig erweitert sie den Formenkosmos der eulerschen Polyeder, Körpern mit gewöhnlich nur einem **Raumelement**, auf geometrische Objekte ohne bzw. mit mehreren **Raumelementen**.

Zunächst ein Beispiel, welches bereits die Mächtigkeit der **Simplex-Formel** veranschaulicht. Dazu verbinden wir **zwei** gleich große reguläre **Tetraeder** zu einer **einzigen** geometrischen Figur über einen gemeinsamen **Eckpunkt**, über eine gemeinsame **Kante** und über eine gemeinsame **Dreiecksfläche**.

Verbindung	Punkte	Linien	Wände	Räume	Summe
über Ecke:	**7**	**12**	**8**	**2**	**29**
über Kante:	**6**	**11**	**8**	**2**	**27**
über Dreieck:	**5**	**9**	**7**	**2**	**23**

Im Bezug auf das eben erwähnte geometrische System aus **Punkten**, geraden **Linien** und ebenen **Wänden** charakterisiert die **Simplex-Formel** bereits eine

Unmenge von *einfach zusammenhängenden* Formen. Was aber bedeutet *einfach zusammenhängend*?

Zur Beantwortung dieser Frage sollten wir vorab grundsätzlich klären, was ist eine geometrische **Form**, woraus besteht sie und wo befindet sie sich?

Definition:

> Jeder **Punkt** ist die unteilbare **Urform** (Atom) einer geometrischen **Form**. Eine **Form** sei eine Menge von *wegzusammenhängenden* **Punkten** in einem dreidimensionalen mathematischen Modellraum. *Wegzusammenhängend* bedeutet in diesem Fall: Zwischen irgend **zwei** verschiedenen **Punkten** einer **Form** gibt es mindestens **einen** Weg, der innerhalb der **Form** verläuft und diese **beiden** **Punkte** verbindet. Jede dieser **Verbindungslinien** besteht aus einer Menge von **Punkten**, die zur betreffenden Form gehören.

Diese Definition beschreibt eine **Form** positiv als *zusammenhängendes* Gefüge aus **Punkten**, differenziert aber nicht zwischen einfach und komplizierter *zusammenhängend*.

Der erwähnte *dreidimensionale mathematische Modellraum* ist ein reiner Ortsraum, dessen **Positionen** als Menge aus geordneten Zahlentripeln **(x, y, z)** notiert werden können. Werden diese **Ortskoordinaten x, y, z** aus der Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ gewählt, formuliert man das zu Grunde liegende mathematische **Modelluniversum** häufig als dreifaches kartesisches Produkt in der Form $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ und spricht dann von einem dreidimensionalen Raumkontinuum. Leider ist dieses mengentheoretisch basierte Modell noch völlig unbrauchbar, weil sich natürlich jeder **Ort** in **einem** von **zwei** unterscheidbaren Zuständen befinden sollte, was bei obiger Definition der **Form** stillschweigend vorausgesetzt wird. Also:

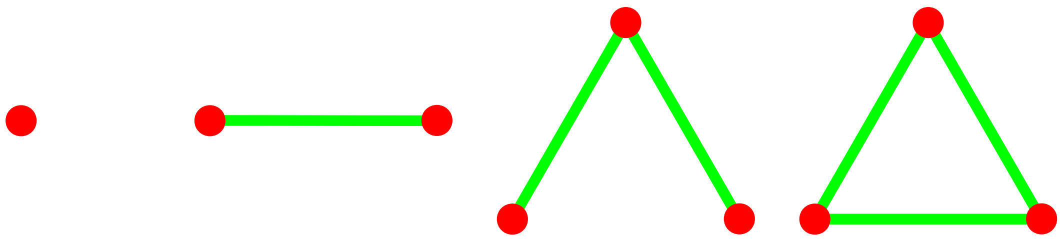
Das Modelluniversum, in dem sich jede mögliche geometrische **Form** befinden kann, sei ein **Informationsraumkontinuum** $\{0,\ 1\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bestehend aus einer Menge von geordneten **Quadrupeln** der Form **(i, x, y, z).** Um das Phänomen der **Form** mit der gebotenen *mathematischer Strenge* erfassen zu können, erscheint es zwingend notwendig, zwischen **leeren** Positionen(**0**) und **vollen** Orten(**1**), den **Punkten** im **Raum**, unterscheiden zu können. Der binäre **Informationszustand i** mit den möglichen Werten **0** und **1** erweitert das Modell dahingehend. Jede Menge von *wegzusammenhängenden* **Punkten** bildet dann eine **Form** in diesem Sinne, während die restlichen **Positionen** nur **leeren** Raum darstellen, der nicht zusammenhängend sein muss.

Zugegeben, die eben ausgeführten Anschauungen mögen manchem Leser bereits ziemlich abstrakt anmuten, aber sie verdeutlichen das *Wesen* der geometrischen **Form** als reine **Informationsstruktur**, entsprechend einer zeitgemäßen Sichtweise in der Philosophie der Mathematik.

Kehren wir nun zu der Frage des *einfachen Zusammenhanges* bezüglich einer Form zurück. Als Arbeitshypothese nehmen wir an, dass diese Formen durch die **Simplex-Formel** beschrieben werden. Dann suchen wir nach einfachen Formen, die nicht durch diese Formel erfasst werden, in der Hoffnung, dass wir bei ihnen einen *komplizierteren Zusammenhang* erkennen können.

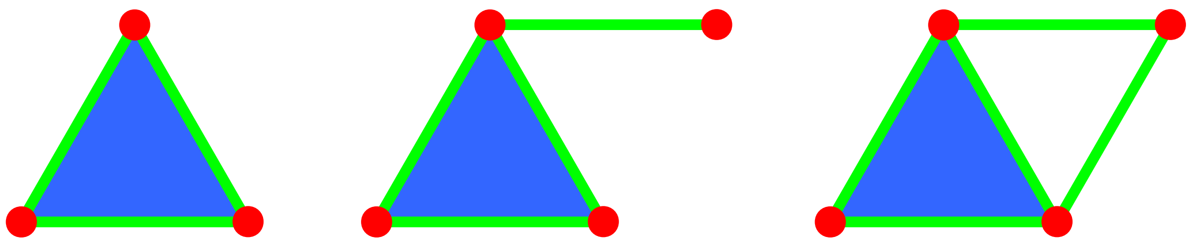
Dazu starten wir unsere kleine Reise wieder beim **Punkt** und bauen im Zuge einer methodischen Konstruktion so lange neue Formen auf, bis wir zu einem Gebilde kommen, welches die **Simplex-Formel** nicht erfüllt.

1. Punkt	**2. Strecke**	**3. Zweibein**	**4. Triangel**



1 = 1 – 0 + 0 – 0	**1 = 2 – 1 + 0 – 0**	**1 = 3 – 2 + 0 – 0**	**0 = 3 – 3 + 0 – 0**

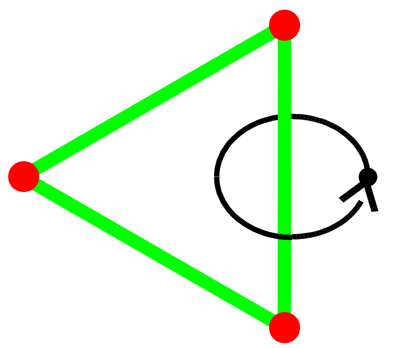
5. Dreieck	**6. Dreieck mit Bein**	**7. Dreieck mit Triangel**

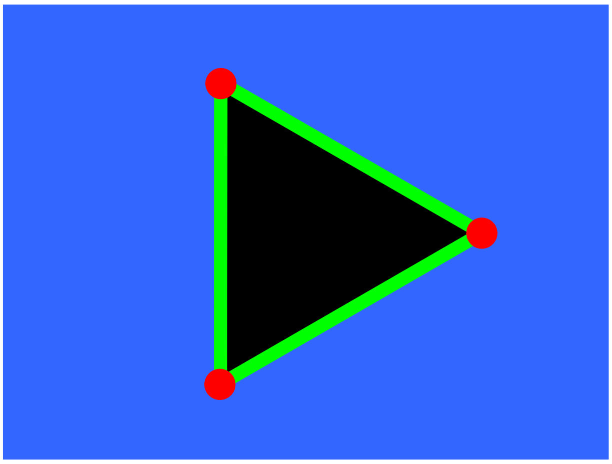


1 = 3 – 3 + 1 – 0	**1 = 4 – 4 + 1 – 0**	**0 = 4 – 5 + 1 – 0**

Anhand unserer Formel erkennen wir sofort, dass die **Triangel** und das **Dreieck mit Triangel** diese gesuchten Formen sind. Fügt man bei der **Triangel** die entsprechende ebene **Wand** hinzu, erhöht sich der Nullwert der Gleichung wieder zum ursprünglichen Ergebnis. Entfernt man hingegen die **Wand** aus dem **Dreieck mit Triangel**, dann verringert sich das Ergebnis auf den Wert **-1**. Diese Änderungen im Ergebnis der **Simplex-Formel** beim Hinzufügen und Entfernen **einer Wand** deuten stark auf die Existenz eines weiteren **Formelements** hin, das dem **Wandelement** gleichwertig gegenüber steht. Natürlich sollte es sich auch hier um eine eindeutig bestimmbare und abzählbare Menge aus diesen **Formelementen** handeln.

Betrachten wir dazu die **Triangel** als Gebilde im **leeren** Raum mit einer **eindimensionalen** Struktur und fragen uns, wie dieses neue **Formelement** wohl aussehen könnte.





Natürlich führt das bloße Fehlen **einer** **Wand** noch nicht automatisch zu einem neuen Formelement. Rechts im Bild sehen wir eine dreieckige **Öffnung** in einer ebenen **Wand**. Es fehlt also **eine** ebene **Wand**, die dieses ***Loch*** verschließen würde. Das Entfernen **einer** **Wand** führt also zunächst zu **einer Öffnung**.

Wenn wir zum Beispiel aus unserer vollständig geschlossenen **Dreieckspyramide eine** **Dreiecksfläche** heraus nehmen, erhalten wir ein **offenes** Gebilde, bei dem lediglich das **Raumelement** verschwunden ist. Erst wenn wir eine **zweite** **Wand** entfernen, erhalten wir wieder einen Nullwert für die **Simplex-Formel**:

$$\mathbf{0 = 4 - 6 + 2 - 0}$$

Dabei handelt es sich um die entscheidende Entdeckung. Erst beim Fehlen von **zwei** **Wänden** kommt das neue **Element** der **Form** zum Tragen. Und in der Tat *fehlen* der oben abgebildeten **Triangel zwei** **Wände**, nämlich die **innere** und die **äußere**.

Natürlich erscheint diese Erkenntnis wesentlich, aber dennoch unbefriedigend, denn es sollte doch möglich sein, dieses Formphänomen noch einfacher zu fassen:

Zwei fehlende **Wände** sind gleichbedeutend mit **zwei Öffnungen**, die wiederum **einen Eingang** und **einen Ausgang** darstellen können. Das heißt, es gibt einen geschlossenen **Weg** im Bereich des **leeren** Raumes, der durch die **Form** hindurch führt, wie er im Bild oben bereits angedeutet ist. Als geschlossene **Linie**

ausgeformt stellt dieser **Weg ein** eigenständiges Objekt dar, das man **Durchgangslinie** nennt. **Sie** kann nicht entfernt werden, ohne die **Form** zu schneiden.

Dieses hinlänglich bekannte Phänomen wollen wir als weiteres neues **Formelement** unter der Bezeichnung **Durchgang d** einführen. Es erlaubt uns offensichtlich die Reise vom **Punkt** zur **Dreieckspyramide** mit einer einzigen Gleichung als Fahrplan zu vollenden. Diese **einfache Form-Formel** lautet:

$$\mathbf{1 = p - l + w - r + d; \quad \forall\, p, l, w, r, d \in \mathbb{N}_0}$$

Die **Triangel** aus der **vierten** Station der Reise kann nun durch

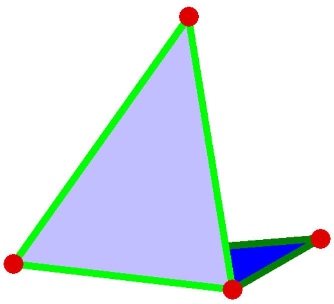
$$\mathbf{1 = 3 - 3 + 0 - 0 + 1}$$

formuliert werden. Entsprechendes gilt für die **siebte** Station, dem **Dreieck mit Triangel**, was man auch leicht überprüfen kann:

$$\mathbf{1 = 4 - 5 + 1 - 0 + 1}$$

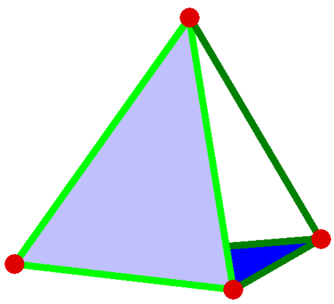
Beenden wir also unsere kleine Reise, und werfen noch einen kurzen Blick auf die vier letzten Schritte.

8. Doppeldreieck



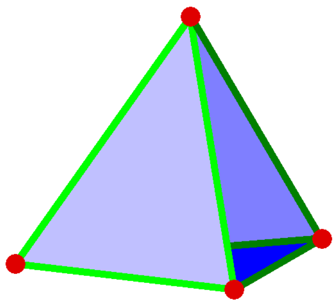
$\mathbf{1 = 4 - 5 + 2 - 0 + 0}$

9. Tetraeder mit Durchgang



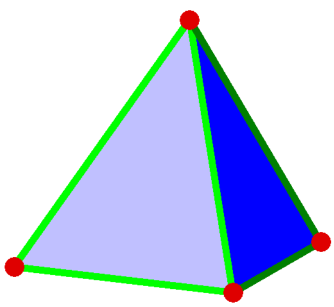
$\mathbf{1 = 4 - 6 + 2 - 0 + 1}$

10. Tetraeder mit Öffnung



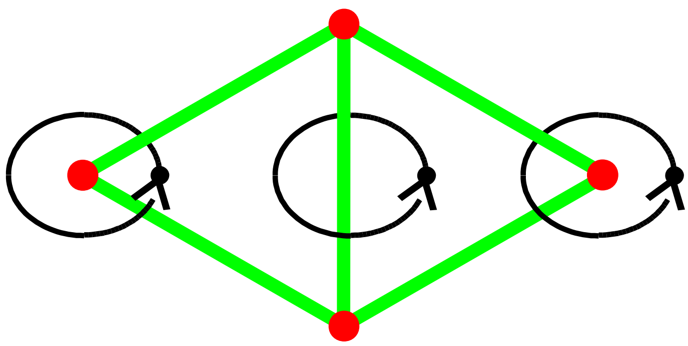
$\mathbf{1 = 4 - 6 + 3 - 0 + 0}$

11. Geschlossene Dreieckspyramide



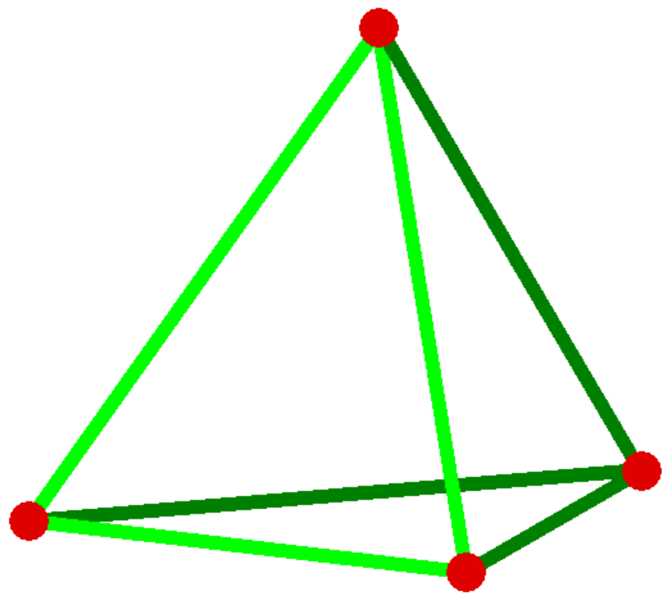
$$\mathbf{1 = 4 - 6 + 4 - 1 + 0}$$

Abschließend noch eine kurze Erläuterung bezüglich der Zählweise der **Durchgangselemente**:



$$1 = 4 - 5 + 0 - 0 + 2$$

Die **Doppeltriangel** oben im Bild sollte entsprechend der fehlenden **Wände** nur **zwei Durchgänge** aufweisen. Aber dennoch lassen sich **drei** verschiedenartige geschlossene **Wege** finden. Die Figur besitzt aber **drei Öffnungen**, **zwei** dreiecksförmige im Innenbereich und **eine** rautenförmige im Außenbereich. Durch jede dieser **drei Öffnungen** führen **zwei** geschlossene **Wege**. Es gibt also jeweils **zwei Durchgangselemente** pro **Öffnung**, oder kurz gesagt **zwei Durchgänge**, die gezählt werden.



$$1 = 4 - 6 + 0 - 0 + 3$$

Ein sehr anschauliches Beispiel liefert das **Gerüst der Dreieckspyramide** oben. Hier fehlen alle **vier Wände**, dem entsprechend gibt es **vier Öffnungen**. Um jede der **sechs Kantenlinien** führt ein geschlossener **Weg**, sodass jede **Öffnung** **drei Durchgänge** aufweist.

Nürnberg, den **11.11.2016** Harald.Wild@cauchy-forum-nuernberg.de

Vom Punkt zur Dreieckspyramide

Eine Reise durch das Universum der Formen in 11 Schritten mit einer einfachen Formel aus 11 Zeichen

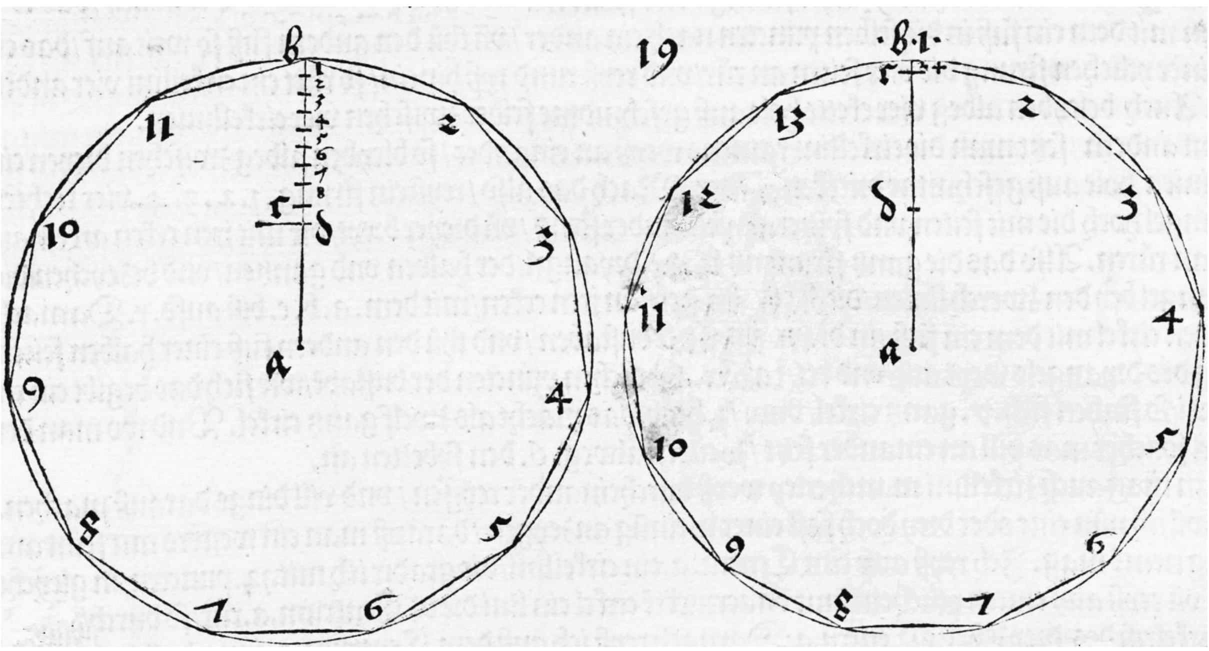
Die einfache Formel der Form in Worten:

EINS = PUNKTE – LINIEN + WÄNDE – RÄUME + DURCHGÄNGE

oder kurz mit 11 Zeichen:

$$1 = p - l + w - r + d$$

In Memoriam Albrecht Dürer



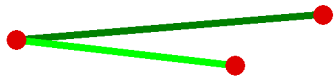
1. Punkt

1 = 1 – 0 + 0 – 0 + 0

2. Strecke

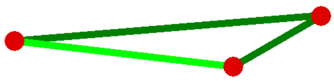
1 = 2 – 1 + 0 – 0 + 0

3. Zweibein



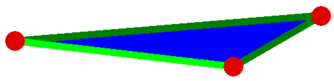
1 = 3 – 2 + 0 – 0 + 0

4. Triangel



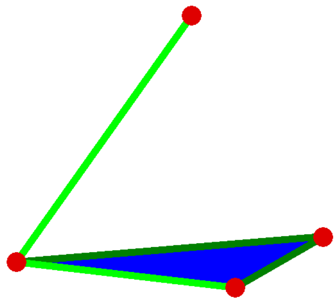
1 = 3 – 3 + 0 – 0 + 1

5. Dreiecksfläche



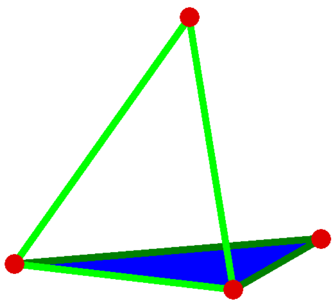
1 = 3 – 3 + 1 – 0 + 0

6. Dreiecksfläche mit Bein



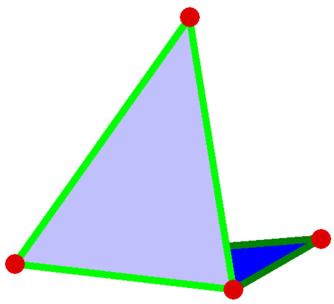
1 = 4 – 4 + 1 – 0 + 0

7. Dreiecksfläche mit Triangel



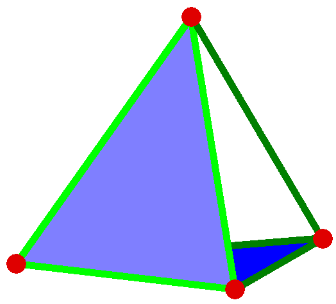
1 = 4 – 5 + 1 – 0 + 1

8. Doppeldreiecksfläche



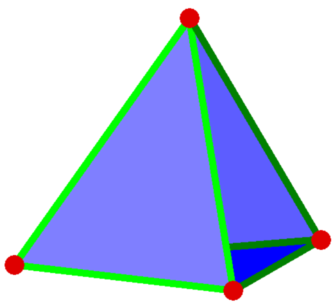
1 = 4 – 5 + 2 – 0 + 0

9. Tetraeder mit Durchgang



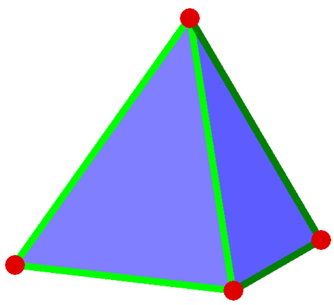
1 = 4 – 6 + 2 – 0 + 1

10. Tetraeder mit Öffnung



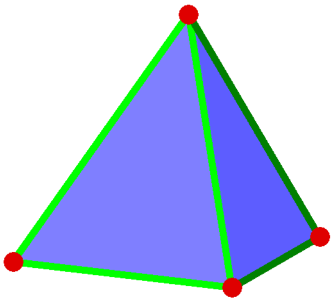
1 = 4 – 6 + 3 – 0 + 0

11. geschlossener Tetraeder



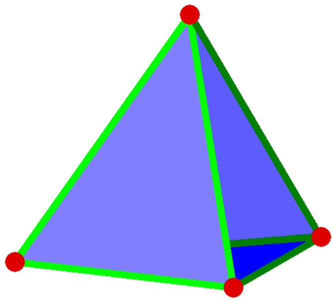
1 = 4 – 6 + 4 – 1 + 0

1. geschlossener Tetraeder



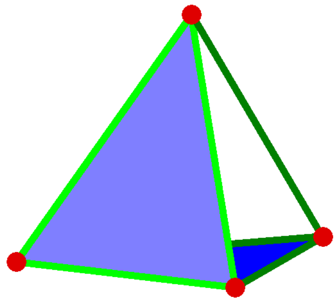
$1 = 4 - 6 + 4 - 1 + 0$

2. Tetraeder mit Öffnung



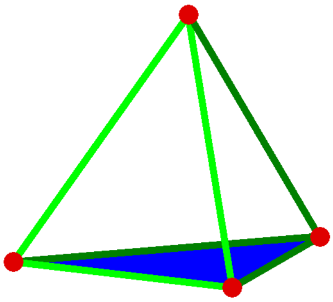
$1 = 4 - 6 + 3 - 0 + 0$

3. Tetraeder mit Durchgang



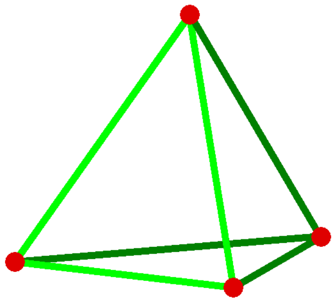
$1 = 4 - 6 + 2 - 0 + 1$

4. Tetraeder mit Bodenfläche



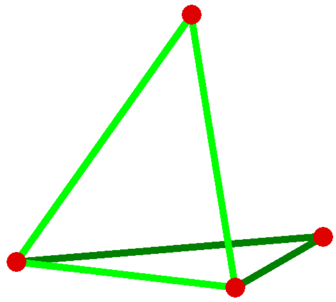
$1 = 4 - 6 + 1 - 0 + 2$

5. Gerüst des Tetraeders



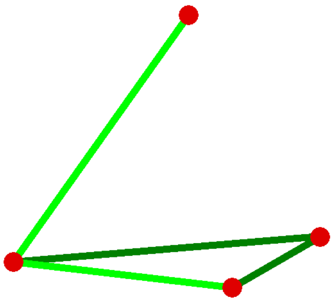
$1 = 4 - 6 + 0 - 0 + 3$

6. Doppeltriangel



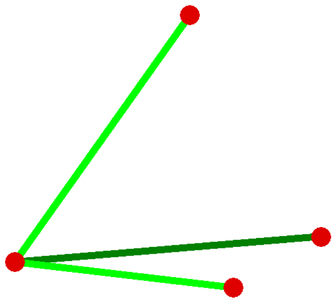
$1 = 4 - 5 + 0 - 0 + 2$

7. Triangel mit Bein



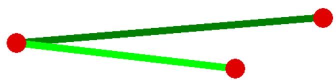
$1 = 4 - 4 + 0 - 0 + 1$

8. Dreibein



$1 = 4 - 3 + 0 - 0 + 0$

9. Zweibein



$1 = 3 - 2 + 0 - 0 + 0$

10. Strecke

$1 = 2 - 1 + 0 - 0 + 0$

11. Punkt

$1 = 1 - 0 + 0 - 0 + 0$